Изучение поведения покупателей с помощью матриц парных сравнений

М.А. Шмелев, email: shmelev1996@mail.ru
М.Г. Матвеев, email: mgmatveev@yandex.ru

Воронежский государственный университет

Аннотация. *В данной работе рассматриваются типы покупателей, которые стоит учитывать продавцу при формировании своего предложения на рынке. Главная цель – сымитировать поведение покупателей на конкретных локальных рынках. Классификация потребителей проведена на основе важных для них характеристиках цены и качества. Изучение корреляции между параметрами цены и качества стало возможным благодаря шкале Саати.*

Ключевые слова: *Типы покупателей, условные вероятности, шкала Саати, согласованность матрицы, матрицы парных сравнений, собственный вектор.*

Введение

В современных экономических условиях, когда вкусы людей меняются, а их потребности растут, покупательские требования на многих рынках становятся все более и более дифференцированными [1,2]. Для компаний становится важным учитывать потребности покупателей в целях получения долгосрочной прибыли.

Проблему нахождения экономического равновесия на рынке, которое бы позволило в должной степени учесть потребности покупателей, пытаются решить многие современные авторы. Одним из наиболее современных подходов к решению проблемы является мультиагентное моделирование [3,4]. При этом в большинстве случаев вызывает трудности описание индивидуального поведения агентов (к примеру, покупателей) на локальных рынках. Поэтому в рамках данной статьи будем полагаться на событийно-дискретное моделирование.

Зачастую при прогнозировании поведения покупателей учитывают их возраст, пол, социальный статус, профессию. Однако продавцы при формировании своего предложения на практике сталкиваются с предпочтениями потребителей по поводу цены и качества товара.

Таким образом, в рамках данной статьи рассматриваются типы покупателей товаров на локальных рынках для пары характеристик «цена» - «качество». Для формализации высказываний о возможных типах покупателей воспользуемся методом парных сравнений и шкалой Саати.

1. Основные типы покупателей

Предпочтительная зависимость и предпочтительная независимость критериев, противоположные по отношению друг к другу, хорошо известны в теории полезности [5]. В статье выдвинуто предположение по поводу формирования покупательского спроса, что цена и качество являются зависимыми параметрами. Поэтому уместно использовать условные вероятности.

Для построения матриц парных сравнений, характеризующих типы покупателей, воспользуемся шкалой Саати [6]. Элементы для матрицы парных сравнений размером $n \times n$ удовлетворяют следующим условиям:

$$w_{ij} = \frac{1}{w_{ji}}; w_{ii} = 1, \qquad (1)$$

для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Для получения согласованной матрицы парных сравнений необходимо, чтобы всегда выполнялось следующее равенство:

$$w_{ik} = w_{ij} \cdot w_{jk}, \qquad (2)$$

для всех $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим основные типы покупателей, которые стоит учитывать продавцам при формировании своего предложения на рынке:

1. «Жадные» покупатели

Клиент стремится купить товар по низкой цене, но высокого качества.

Логика расстановки значений элементов в матрице парных сравнений такова. Пусть a_1 – минимальная цена, b_1 – минимальное качество. Элемент $w_{11} = \frac{b_1}{a_1} = 1$. Если цена минимальная, а качество немного улучшилось: $w_{12} = \frac{b_2}{a_1} = 2$. Найдем следующий элемент: $w_{13} = \frac{b_3}{a_1} = 3$. И так далее по первой строке. Теперь начнем вторую строку матрицы. Цена повысилась, а качество минимальное:

$w_{21} = \frac{b_1}{a_2} = \frac{1}{2}$, и т.д. Как можно заметить, подсчет элементов матрицы можно произвести по формуле:

$$w_{ij} = \frac{j}{i}, \qquad (3)$$

для упорядоченных значений $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots., b_j, \ldots, b_n)$, n – размерность матрицы.

Нетрудно заметить, что данная формула полностью удовлетворяет равенству (2): $\frac{k}{i} = \frac{j}{i} \cdot \frac{k}{j}$. Строим матрицу размерностью $n = 6$. В итоге получаем матрицу парных сравнений цены и качества следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Чтобы выразить локальный рынок с более сильной «жадностью» покупателей, можно построить другую матрицу $A1$. Элементы этой матрицы подсчитываются по формуле (5):

$$w_{ij} = 2^{j-i}, \qquad (5)$$

для упорядоченных значений $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots., b_j, \ldots, b_n)$, n – размерность матрицы.

К примеру, элемент $w_{16} = 2^{6-1} = 32$. При минимальном значении качества и максимальном значении цены получим $w_{61} = 2^{1-6} = \frac{1}{32}$. Тогда для рассматриваемого случая мы получим матрицу парных сравнений $A1$:

$$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Далее покажем, что формула (5) также удовлетворяет равенству (2): $2^{k-i} = 2^{j-i} \cdot 2^{k-j}$.

2. «Элитные» покупатели («премиум-покупатели»)

Таких покупателей в основном интересует только товар по высокой цене и высокого качества.

В данном случае для учета особенностей локального рынка с данным типом покупателей построим матрицу B следующим образом. Элемент с максимальным значением $w_{66} = 6$ будет обозначать товар с наибольшей ценой и наибольшим качеством. В итоге построим матрицу, симметричную относительно побочной диагонали:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Для построения матрицы B можно воспользоваться следующей формулой:

$$w_{ij} = \frac{j}{n+1-i}, \tag{8}$$

для упорядоченных значений $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots., b_j, \ldots, b_n)$, n – размерность матрицы.

Заметим, что при зеркальном преобразовании матрицы B можно получить классический вид матрицы парных сравнений.

3. «Умеренные» покупатели

Клиенты такого типа желают купить, прежде всего, товар среднего качества по средней цене.

Снова строим матрицу размером 6 на 6. С учетом типа покупателей наибольшие значения будут наблюдаться в середине матрицы: $w_{33} = w_{34} = w_{43} = w_{44} = 4$. Матрица C выглядит следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Если третью строку матрицы поменять местами с первой, а шестую строку – с четвертой, можно превратить матрицу C в матрицу парных сравнений классического вида.

2. Изучение рынка «жадных» покупателей

Далее приступим к изучению корреляции между ценой и качеством. Рынок «жадных» покупателей будет первым, для которого найдем безусловные вероятности, условные вероятности зависимости качества от цены и вероятности для параметра «цена».

Изучение пары характеристик «цена» - «качество» возможно благодаря имитационному моделированию рынка [7], где присутствуют покупатели и продавцы. Моделирование поведения покупательского спроса с помощью процедуры парных сравнений также проводилось в работе [8].

Алгоритм действий для нашей задачи следующий. Просуммируем все элементы обратно-симметричной матрицы: $S = \sum_{ij} w_{ij}$. Вычислим безусловные вероятности $p_{ij} = \frac{w_{ij}}{S}$, а затем условные вероятности: $p_i\left(a_i / b_j\right) = \frac{p_{ij}}{\sum_j p_{ij}}$.

Подсчет значений вероятности для параметра «цена» осуществлялся с помощью:

$$p(b_j) = \frac{p_{ij}}{p_i(a_i / b_j)} \tag{10}$$

Результат выполнения операций для матрицы A показан в табл. 1-3.

Таблица 1

Двумерное распределение для матрицы A

p_{ij}	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
$i = 1$	0,01944	0,03887	0,05831	0,07775	0,09718	0,11662
$i = 2$	0,00972	0,01944	0,02915	0,03887	0,04859	0,05831
$i = 3$	0,00648	0,01296	0,01944	0,02592	0,03239	0,03887
$i = 4$	0,00486	0,00972	0,01458	0,01944	0,02430	0,02915
$i = 5$	0,00389	0,00777	0,01166	0,01555	0,01944	0,02332
$i = 6$	0,00324	0,00648	0,00972	0,01296	0,01620	0,01944

Матрица A, характеризующая рынок «жадных» покупателей, обладает идеальной согласованностью. Это подкрепляется тем, что каждая строка является положительным кратным любой другой заданной строки. Тогда максимальное собственное значение для матрицы A : $\lambda_{\max} = n$, где n – размерность матрицы [6].

Таким образом, рассматривается решение задачи о поиске собственных значений и векторов: $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$. Представляется интересным тот факт, что ранее рассмотренный алгоритм действий позволяет для согласованной, обратно-симметричной матрицы получить менее трудоемким способом приближенные значения компоненты собственного вектора, соответствующего максимальному собственному числу. В таком случае, данные значения являются условными вероятностями распределения одного параметра относительно другого.

Таблица 2

Условные вероятности для матрицы А

$p_i\left(a_i / b_j\right)$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
$i = 1$	0,04762	0,09524	0,14286	0,19048	0,23810	0,28571
$i = 2$	0,04762	0,09524	0,14286	0,19048	0,23810	0,28571
$i = 3$	0,04762	0,09524	0,14286	0,19048	0,23810	0,28571
$i = 4$	0,04762	0,09524	0,14286	0,19048	0,23810	0,28571
$i = 5$	0,04762	0,09524	0,14286	0,19048	0,23810	0,28571
$i = 6$	0,04762	0,09524	0,14286	0,19048	0,23810	0,28571

Таблица 3

Вероятности для параметра «цена»

$p(b_j)$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$
$i = 1$	0,40816	0,40816	0,40816	0,40816	0,40816	0,40816
$i = 2$	0,20408	0,20408	0,20408	0,20408	0,20408	0,20408
$i = 3$	0,13605	0,13605	0,13605	0,13605	0,13605	0,13605
$i = 4$	0,10204	0,10204	0,10204	0,10204	0,10204	0,10204
$i = 5$	0,08163	0,08163	0,08163	0,08163	0,08163	0,08163
$i = 6$	0,06803	0,06803	0,06803	0,06803	0,06803	0,06803

Анализ предыдущего результата позволяет построить табл. 4, которая необходима для генерирования значений цены и качества с помощью имитационной модели.

Имитация (получение 1001 значения цены и качества) проводилась на основе последовательного метода обратных функций. Он основан на свойстве, что каждому значению из заданной таблицы можно сопоставить интервал, равный по длине его вероятности. Если перевести на язык формул:

$$s_0 = 0, s_n = 1; s_i = s_{i-1} + p_i, \tag{11}$$

где s_i – накопленные вероятности, с которыми сравнивается конкретное x в цикле, пока первый раз не реализуется неравенство $x \le s_i$. Полученное значение i позволит с помощью модифицированной таблицы найти искомый результат. Эта идея лежит в основе последовательного метода обратных функций [9].

Таблица 4

Значения цены и качества и их вероятности для матрицы A

Вероятность конкретного значения цены	**Значение цены**	**Вероятность конкретного значения качества**	**Значение качества**
0,40816	0	0,04762	0
0,20408	0,2	0,09524	0,2
0,13605	0,4	0,14286	0,4
0,10204	0,6	0,19048	0,6
0,08163	0,8	0,23810	0,8
0,06803	1	0,28571	1

Применение критерия корреляции Пирсона [10] напрямую к сгенерированным значениям цены и качества (1001 значение) на основе табл. 4 приводит к статистически незначимому результату: $r \approx 0{,}03$.

Однако интересной для изучения представляется корреляция между значениями цены $\tilde{B}$ и суммарными значениями цены и качества $\tilde{A} + \tilde{B}$. Для полученных с помощью имитации значений цены и качества среднее значение цены равно 0,282318, а среднее значение качества равно 0,664136, что в сумме близко к единице.

В итоге коэффициент корреляции Пирсона для значений цены $\tilde{B}$ и суммарных значений цены и качества $\tilde{A} + \tilde{B}$ получился: $r2 \approx 0{,}7442$, что говорит о высокой связи между изучаемыми параметрами.

3. Рассмотрение других типов покупателей

Безусловные вероятности, условные вероятности зависимости качества от цены и вероятности для параметра «цена» были найдены аналогичным образом для матриц $A1, B, C$.

Вероятности значений цены и качества для матрицы $A1$, характеризующей рынок особо «жадных» покупателей, показаны в табл. 5.

Таблица 5

Значения цены и качества и их вероятности для матрицы $A1$

Вероятность конкретного значения цены	**Значение цены**	**Вероятность конкретного значения качества**	**Значение качества**
0,50794	0	0,01587	0
0,25397	0,2	0,03175	0,2
0,12698	0,4	0,06349	0,4
0,06349	0,6	0,12698	0,6
0,03175	0,8	0,25397	0,8
0,01587	1	0,50794	1

Применение напрямую коэффициента корреляции Пирсона так же, как и для матрицы A, привело к статистически незначимому результату. Получено значение $r \approx 0,03$.

Однако сумма средних значений цены и качества, полученная с помощью табл. 5, получается равной единице. Также был подсчитан коэффициент корреляции Пирсона для значений цены $\tilde{B}$ и суммарных значений цены и качества $\tilde{A} + \tilde{B}$: $r2 \approx 0,7171$.

Результаты подсчета значений вероятности цены и качества для матриц B и C показаны соответственно в табл.6-7.

Таблица 6

Значения цены и качества и их вероятности для матрицы B

Вероятность конкретного значения цены	**Значение цены**	**Вероятность конкретного значения качества**	**Значение качества**
0,06803	0	0,04762	0
0,08163	0,2	0,09524	0,2
0,10204	0,4	0,14286	0,4
0,13605	0,6	0,19048	0,6
0,20408	0,8	0,23810	0,8
0,40816	1	0,28571	1

Таблица 7

Значения цены и качества и их вероятности для матрицы C

Вероятность конкретного значения цены	**Значение цены**	**Вероятность конкретного значения качества**	**Значение качества**
0,07143	0	0,07143	0
0,14286	0,2	0,14286	0,2
0,28571	0,4	0,28571	0,4
0,28571	0,6	0,28571	0,6
0,14286	0,8	0,14286	0,8
0,07143	1	0,07143	1

Интересно, что условные вероятности для качества в матрице B получились такими же, как и в матрице A. А вероятности для значений цены и качества в матрице C получились равными. Сумма средних значений цены и качества, полученная с помощью табл. 7, получается: 0,5+0,5=1.

Подсчет коэффициентов корреляции Пирсона для значений, полученных с помощью имитации в рамках матрицы B, дал следующий результат: $r \approx 0{,}01; r2 \approx 0{,}7478$. Аналогичные коэффициенты, полученные с помощью имитации для матрицы C: $r \approx 0{,}02; r2 \approx 0{,}7204$.

Таким образом, в рассмотренных матрицах парных сравнений наблюдается сильная взаимосвязь между значениями цены и суммарными значениями цены и качества, обусловленная способом подсчета вероятностей конкретных значений рассматриваемых характеристик «цена» - «качество».

Заключение

В итоге были рассмотрены типы покупателей, которые стоит учитывать продавцу при формировании своего товарного предложения. Современная рыночная экономика базируется на индивидуальном подходе к каждому потребителю, что подразумевается в рамках данной работы.

Выполнена главная цель статьи – сымитировать поведение различных типов покупателей, которые могут встретиться в реальной жизни.

Изучение корреляции между параметрами цены и качества стало возможным благодаря шкале Саати. Сформулировано утверждение, полезное в рамках более быстрого решения задачи о нахождении собственных векторов для согласованной, обратно-симметричной матрицы с приемлемой точностью.

Список литературы

1. Гантер Б. Типы потребителей: введение в психографику / Б. Гантер, Г. Фернхам. – СПб.: Питер, 2001. – 304 с.
2. Блэкуэлл Р. Поведение потребителей / Р. Блэкуэлл, П. Миниард, Дж. Энджел. – 10-е изд. – СПб.: Питер, 2007. – 944 с.
3. Неверов А. Н. Агент-ориентированная модель совершенной экономики / А. Н. Неверов, Ф. С. Голубев, М. А. Каткова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Экономика. Управление. Право. – 2020. – Т. 20, выпуск 3. – С. 266-270. DOI: https://doi.org/10.18500/1994-2540-2020-20-3-266-270
4. Кошуняева Н. В. Применение агентного моделирования к построению модели системы выхода нового товара на рынок / Н. В. Кошуняева, С. А. Токаревская // Инновационные аспекты развития науки и техники. – 2021. – №3.
5. Сакулин С. А. К вопросу о практическом применении нечетких мер и интеграла Шоке / С. А. Сакулин, А. Н. Алфимцев // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2012. – №. 1.
6. Саати Т. Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Л. Саати. – М.: Радио и связь, 1989. – 316 с.
7. Матвеев М. Г. Информационные технологии формирования предложения на электронной торговой площадке с технологией маркетплейс / М. Г. Матвеев // Экономика и математические методы. – 2021. – №1. – С. 114-121.
8. Matveev M. Simulation modelling for assessing the adequacy of decision support models with choosing a product offer / M. Matveev, M. Shmelev, A. Budyakov // ICID 2021. Communications in Computer and Information Science. – Springer, Cham, 2022.
9. Некруткин В. В. Моделирование распределений / В. В. Некруткин // Кафедра статистического моделирования, матмех СПбГУ. Материал к специальному курсу. – 2014. – 100 с.
10. Медицинская статистика [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://medstatistic.ru/methods/methods8.html